Departamento de Cs. e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Algoritmos y Complejidad

Trabajo Práctico 3

Resolución de Recurrencias

Primer cuatrimestre de 2017

1. Resolver las siguientes recurrencias e indicar el orden de $t(n)$.

   a) $t(n) = 3t(n-1) - 2t(n-2)$, sujeta a $t(0) = 0$, $t(1) = 1$.

   b) $t(n) = 4t(n-1) - 4t(n-2)$, sujeta a $t(0) = 1$, $t(1) = 4$.

   c) $t(n) = t(n-2)$.

   d) $t(n) = 4t(n-1) + 2^n$, sujeta a $t(0) = 0$, $t(1) = 2$.

   e) $t(n) = t(n-1) + n$.

   En los incisos (a), (b) y (d) determinar las constantes en la solución general.

2. Considere la recurrencia $t(n) = 4t(n-1) - 2^n$. Determinar el orden asintótico exacto de la función cuando:

   - $t(0) = 1$
   - $t(0) = 2$

   ¿Son del mismo orden? ¿Por qué?

3. Cuando se obtiene un orden asintótico de tiempo condicional, suele ser útil el siguiente resultado

   Regla de Suavidad [BB96, Sección 3.4]
   Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ una función suave y $t : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ una función eventualmente no decreciente. Si $t(n) \in \Theta(f(n)|$ n es potencia de b) entonces $t(n) \in \Theta(f(n))$.

   a) Definir cuando una función es:

   - *eventualmente no decreciente*
   - *b-suave*
   - *suave*

   b) Sea $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$ una función b-suave con constantes c y n_0 tales que $f(bn) \leq cf(n)$ para todo $n \geq n_0$. Probar que para cualquier natural positivo i, $f(b^i n) \leq c^i f(n)$ para todo $n \geq n_0$.

   c) Utilizando los resultados del inciso anterior, probar que si una funcion f es *b-suave* para algún entero $b \geq 2$, entonces f es suave.

   d) Demostrar la *Regla de suavidad*.

4. Demostrar que n^k es suave para todo $k \in \mathbb{N}$.

5. Mostrar que las funciones $n^{\log n}$, 2^n, y $n!$ no son suaves. (Ayuda: probar que no son b-suaves para b=2).

6. Efectuar los cambios de variable necesarios y resolver las siguientes recurrencias, indicando *el orden condicional exacto* en el que está $t(n)$. Verificar si es posible aplicar la *Regla de Suavidad*.

   a) $t(n) = 4t(n/2) + n$.
   b) $t(n) = 4t(n/2) + n^2$.
   c) $t(n) = 2t(n/2) + \lg n$.
   d) $t(n) = 2t(n/2) + n \lg n$.
   e) $t(n) = 2t(\sqrt{n}) + \lg n$ (para n de la forma $2^{(2^k)}$).

7. *Teorema Maestro* [CLRS09, Sección 4.5]

   a) Indicar qué recurrencias del ejercicio 6 pueden resolverse utilizando el método del *Teorema Maestro*. Resolver dichas recurrencias utilizando ese método.
   b) Resuelva las siguientes recurrencias utilizando el Teorema Maestro.
      - $t(n) = 3t(n/2) + n^2$
      - $t(n) = 16t(n/4) + n$.
      - $t(n) = 3t(n/3) + n/2$.

8. Existe una generalización del método de la ecuación característica que permite resolver recurrencias de la forma

$$t(n) = a_1t(n-1) + a_1t(n-2) + \ldots + a_kt(n-k) + b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \ldots$$

   donde los b_i son constantes y los p_i son polinomios en n de grado s_i. La ecuación característica para estas recurrencias se construye de la siguiente manera:

$$(x^k - a_1x^{k-1} - \ldots - a_k)(x-b_1)^{s_1+1}(x-b_2)^{s_2+1}\ldots = 0$$

   Utilizando la generalización del método de la ecuación característica, resolver las recurrencias que se enuncian a continuación. Determinar el valor de las constantes en la solución general.

   a) $t(n) = 2t(n-1) + n + 2^n$, sujeta a $t(0) = 0$.
   b) $t(n) = 4t(n-1) - 4t(n-2) + 3^n + n^2$.
   c) $t(n) = 4t(n-1) - 2^n$, sujeta a $t(0) = 1$.
   d) $t(n) = 3t(n-1) - 2t(n-2) + 3(2^{n-2})$, sujeta a $t(0) = 1$ y $t(1) = 2$.

9. Para la implementación recursiva de la operación de *búsqueda* en un Árbol Binario de Búsqueda, enunciar y resolver la recurrencia generada por su tiempo de ejecución en el peor caso.

Referencias

[BB96] Gilles Brassard and Paul Bratley. *Fundamentals of Algorithmics*. Prentice Hall, 1996.

[CLRS09] Thomas H. Cormen, Charles E. Leiserson, Ronald L. Rivest, and Clifford Stein. *Introduction To Algorithms*. The MIT Press, 3rd edition, 2009.