

Algoritmos y Complejidad

Análisis Amortizado de Estructuras de Datos

Pablo R. Fillottrani

Depto. Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Primer Cuatrimestre 2017



Análisis Amortizado de Estructuras de Datos

Tipos de análisis amortizado

Ejemplos simples

Heaps asimétricos

Heaps de Fibonacci



Usos y principios

- ▶ el **análisis amortizado** estudia el tiempo requerido para ejecutar una secuencia de operaciones sobre una estructura de datos
- ▶ si usamos el análisis normal en el peor caso, ejecutar N operaciones sobre una estructura de datos de n elementos lleva tiempo en $O(Nf(n))$, donde $f(n)$ es el tiempo en el peor caso de la operación
- ▶ en muchos casos esa cota no es ajustada debido a que **el peor caso puede NO ocurrir las N veces**, o incluso ninguna de esas veces
- ▶ entonces se introducen las técnicas de **análisis amortizado** para tratar de obtener una cota menor para **la serie de operaciones**



- ▶ el análisis amortizado se diferencia del análisis en el **caso promedio** en que no involucra probabilidades, y en que garantiza el tiempo en el peor caso de las N operaciones
- ▶ el análisis probabilístico produce un **tiempo esperado** que una determinada ejecución puede sobrepasar o no
- ▶ el análisis amortizado produce **una cota en el tiempo de ejecución de la serie** de operaciones (es decir, sigue siendo un análisis del peor de los casos)



- ▶ los resultados del análisis amortizado sirven para **optimizar el diseño** de la estructuras de datos, produciendo entonces estructuras de datos avanzadas
- ▶ si las operaciones sobre una estructura de datos se llaman en una secuencia conocida entonces conviene minimizar el tiempo de sus operaciones mediante el análisis amortizado
- ▶ la E.D. **conjuntos disjuntos** al utilizar compresión de caminos está aplicando esta metodología, obteniendo una cota $O(N \log^* n)$ para las N operaciones.



Tipos de análisis amortizado

- ▶ existen diversas técnicas para realizar el análisis amortizado:

Técnicas de Análisis Amortizado

- metodo del agregado
- metodo contable
- metodo del potencial

- ▶ en general todas las técnicas son aplicables a todos los casos y dan resultados equivalentes
- ▶ sólo veremos en la materia el **método del potencial**



Método del potencial

- ▶ este método representa los ahorros hechos en operaciones previas mediante incrementos en la **“energía potencial”**, que puede ser gastada en operaciones costosas siguientes
- ▶ la **energía potencial** representa las tareas realizadas en llamadas anteriores de una operación, que pueden ser usadas en próximas invocaciones a la operación
- ▶ se comienza con una estructura de datos inicial D_0 , y para cada $i = 1, 2, \dots, N$ sea c_i el **costo real** de la i -ésima operación y D_i la estructura de datos resultante después de aplicar esa operación sobre D_{i-1}



- ▶ una **función potencial** Φ mapea cada estado D_i de la estructura de datos a un número real, llamado el **potencial** de D_i
- ▶ el **costo amortizado** de la i -ésima operación se define como

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})$$

- ▶ entonces, la sumatoria de los costos amortizados de la secuencia de operaciones es:

$$\sum_{i=1}^N \hat{c}_i = \sum_{i=1}^N (c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1})) = \sum_{i=1}^N c_i + \Phi(D_N) - \Phi(D_0)$$

- ▶ si se puede definir Φ tal que $\Phi(D_N) \geq \Phi(D_0)$ entonces este valor es una cota superior a la sumatoria de costos reales
- ▶ si la función está bien elegida y la E.D. está diseñada para ello, esta cota superior es **más ajustada** que N veces el peor caso



Pila extendida

- ▶ consideremos una E.D. Pila con la operación adicional `DesapilarMúltiple(k)` que elimina los k elementos que están más arriba en la pila
- ▶ las operaciones `Apilar`, `Desapilar` y `Tope` son de $\Theta(1)$ en el peor caso individual, pero la operación `DesapilarMúltiple(k)` es de $\Theta(\min(k, n))$, siendo n los elementos en la pila
- ▶ esto da un tiempo de $O(nN)$ para cualquier secuencia de N operaciones
- ▶ consideraremos de costo real 1 a las tres primeras operaciones.



- ▶ para hacer el **análisis amortizado**, tomemos como función potencial $\Phi(D_i)$ la cantidad de elementos en la pila D_i
- ▶ dado que nunca es negativo, $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$ para todo i
- ▶ esto asegura que la sumatoria de costos amortizados es una **cota superior** a la sumatoria de costos reales



Análisis amortizado de las operaciones

- ▶ sea s la cantidad de elementos después de $i - 1$ operaciones.
- ▶ para la operación `Apilar`:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + s + 1 - s = 2 \in \Theta(1)$$

- ▶ para la operación `Tope`:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + s - s = 1 \in \Theta(1)$$



- ▶ para la operación `Desapilar`:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = 1 + (s - 1) - s = 0 \in \Theta(1)$$

- ▶ en todos estos casos el análisis amortizado **no mejora** la cota de la secuencia de operaciones obtenida con N veces el peor caso



- ▶ para la operación `DesapilarMúltiple(k)`, con $k \leq s$:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = k + s - k - s = 0 \in \Theta(1)$$

- ▶ para la operación `DesapilarMúltiple(k)`, con $k > s$:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = s + 0 - s = 0 \in \Theta(1)$$

- ▶ este análisis amortizado permite afirmar que N operaciones sobre esta E.D. lleva tiempo en $\Theta(N)$ en el peor caso



Contador binario

- ▶ se tiene un contador binario de n bits con la operación de incremento
- ▶ el costo de esta operación es la cantidad de bits cambiados
- ▶ en el peor caso, la cantidad de bits cambiados son todos los bits del contador, por lo que N incrementos es de $O(nN)$
- ▶ es claro que el peor de los casos no se da en todas las N operaciones, por lo que es válido realizar un análisis amortizado



- ▶ para hacer un análisis amortizado de esta E.D. tomaremos como función potencial **la cantidad de 1's en el contador**
- ▶ si empezamos con el contador en cero, $\Phi(D_i) \geq \Phi(D_0)$ para todo i , por lo que podemos asegurar que la sumatoria de costos amortizados es una cota superior a la sumatoria de costos reales



- ▶ sea s la cantidad de 1's del contador antes del incremento, t de los cuales se modifican en la i -ésima operación
- ▶ el costo amortizado de la operación es:

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(D_i) - \Phi(D_{i-1}) = (1 + t) + (s - t + 1) - (s) = 2 \\ &\in \Theta(1) \end{aligned}$$

- ▶ luego, N operaciones de incremento del contador llevan en el peor caso tiempo de $\Theta(N)$
- ▶ se puede extender el análisis amortizado aún para el caso cuando el contador no empieza en 0 ([ejercicio](#))



Tablas dinámicas

- ▶ en algunas aplicaciones no se conoce previamente la cantidad de objetos que pueden llegar a ser almacenados en una tabla
- ▶ es útil por lo tanto utilizar una **tabla dinámica** que vaya solicitando memoria a medida que la necesita
- ▶ las operaciones normales de **Inserción** y **Eliminar** toman tiempo en $\Theta(1)$
- ▶ pero el peor caso de una inserción con **expansión** es de orden de la cantidad de memoria asignada, lo que hace que la cota superior de una serie de operaciones no sea ajustada si la expansión es infrecuente



- ▶ para implementar esta E.D. será conveniente referirse al **factor de carga** $\alpha(T)$
- ▶ se define como la relación entre la cantidad de elementos y la memoria asignada:

$$\alpha(T) = \text{elementos} / \text{capacidad}$$

- ▶ también supondremos que la asignación de la nueva memoria es independiente de la anterior, o sea no se pueden juntar lo que se tenía antes con lo que se dispone ahora



- ▶ si T está vacía, por definición es $\alpha(T) = 1$
- ▶ supongamos en principio que se quiere implementar una tabla dinámica que sólo soporte inserciones
- ▶ es necesario decidir cuándo y cuánto expandir
- ▶ una heurística común es realizar la expansión en el momento que la tabla **no permita una inserción** (ie $\alpha(T) = 1$), incorporando el **doble de la memoria** hasta entonces disponible



```

PROCEDURE Insertar(x)
  IF this.tamaño=0
    asignar memoria para un elemento
    this.tamaño ::= 1
  ENDIF
  IF this.tamaño=this.elementos
    asignar el doble de memoria disponible
    trasladar todos los elementos
    this.tamaño::=2*this.tamaño
    liberar la memoria anterior
  ENDIF
  insertarElemental(x)
  this.elementos ::= this.elementos++
RETURN

```



- ▶ el tiempo en el peor caso de una inserción en una tabla de n elementos es de $\Theta(n)$, por lo que una serie de N operaciones es de $O(nN)$
- ▶ con esta heurística se asegura que el factor de carga **nunca es menor que 0,5**, por lo que el espacio usado no superará el doble de lo máximo necesitado
- ▶ la expansión de la tabla ocurre solamente cuando la cantidad de elementos es potencia de 2
- ▶ la mayoría de las inserciones son de tiempo constante



- ▶ se necesita una función potencial que valga 0 inmediatamente después de una expansión, y la cantidad de elementos insertados inmediatamente antes de la expansión
- ▶ una posibilidad es:

$$\Phi(T_i) = 2 * T_i.\text{elementos} - T_i.\text{tamaño}$$

- ▶ vale que $\Phi(T_i) \geq \Phi(T_0)$ si se comienza con la tabla vacía



- ▶ el análisis amortizado para una inserción es:
 - ▶ sin expansión

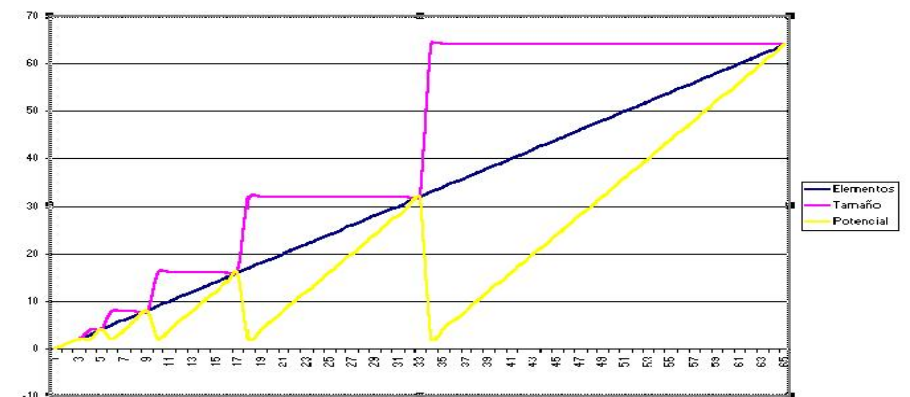
$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) = \\ &= 1 + (2 * (\text{elem}_{i-1} + 1) - \text{tam}_{i-1}) - \\ &\quad - (2 * \text{elem}_{i-1} - \text{tam}_{i-1}) = \\ &= 1 + 2 = 3 \in \Theta(1) \end{aligned}$$

- ▶ con expansión

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) = \\ &= 1 + \text{elem}_{i-1} + (2 * (\text{elem}_{i-1} + 1) - 2 * \text{tam}_{i-1}) - \\ &\quad - (2 * \text{elem}_{i-1} - \text{tam}_{i-1}) = \\ &= 1 + \text{elem}_{i-1} + 2 - \text{tam}_{i-1} = 3 \in \Theta(1) \end{aligned}$$



Comparación



- ▶ para implementar la operación `Eliminar` es suficiente con remover el elemento de la tabla
- ▶ sin embargo, es deseable también implementar una **contracción** cuando el factor de carga de la tabla sea suficientemente pequeño
- ▶ se quiere entonces **acotar por abajo el factor de carga**, y **acotar por arriba el costo amortizado de las operaciones**
- ▶ una estrategia natural es contraer la tabla a la mitad **cuándo el factor de carga es menos de 0,5**. Sin embargo, esta estrategia no es buena.



- ▶ el problema con esta estrategia surge cuando **no se ejecutan suficientes inserciones** después de una expansión como para pagar el gasto de una contracción
- ▶ en términos del potencial, no hay energía potencial que compense ese gasto
- ▶ por ejemplo:

$$\underbrace{I, I, \dots, I, I}_{n/2}, D, D, I, I, \dots$$

- ▶ el problema está en que la expansión y contracción se realizan con una misma cota al factor de carga
- ▶ luego en el peor caso puede haber expansiones y contracciones en $O(N)$ operaciones de una secuencia de N



- ▶ se puede mejorarla **bajando la cota inferior al factor de carga**: ponerla en 0,25 en lugar de 0,5
- ▶ entonces, se expande cuando $\alpha(T) = 1$, pero sólo se contrae cuando $\alpha(T) < 0,25$
- ▶ después de una expansión vale $\alpha(T) = 0,5$ y deben ser eliminados la mitad de los elementos para que ocurra una contracción
- ▶ análogamente, después de una contracción $\alpha(T) = 0,5$ y deben ser insertados otros tantos elementos para que ocurra una expansión



- ▶ para el análisis amortizado la **función potencial** debe ser 0 inmediatamente después de una expansión y de una contracción; y aumentar a medida que el factor de carga se acerca a 1 o disminuye a 0,25
- ▶ una posibilidad es:

$$\Phi(T_i) = \begin{cases} 2 * T_i.\text{elementos} - T_i.\text{tamaño} & \text{si } \alpha(T) \geq 0,5 \\ T_i.\text{tamaño}/2 - T_i.\text{elementos} & \text{si } \alpha(T) < 0,5 \end{cases}$$

- ▶ esta función **cumple con los requerimientos** de una función potencial



- ▶ el análisis amortizado para una inserción cuando $\alpha(T_{i-1}) \geq 0,5$ es idéntico al caso anterior
- ▶ si $\alpha(T_{i-1}) < \alpha(T_i) < 0,5$ entonces:

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (tam_{i-1}/2 - (elem_{i-1} + 1)) - (tam_{i-1}/2 - elem_{i-1}) \\ &= 1 - 1 = 0 \in \Theta(1)\end{aligned}$$

- ▶ y si $\alpha(T_{i-1}) < 0,5$ pero $\alpha(T_i) \geq 0,5$ entonces:

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (2 * (elem_{i-1} + 1) - tam_{i-1}) - (tam_{i-1}/2 - elem_{i-1}) \\ &= 3 + 3 * elem_{i-1} - 3/2 * tam_{i-1} \\ &\leq 3 + 3 * (0,5 * tam_{i-1}) - 3/2 * tam_{i-1} = 3 \in \Theta(1)\end{aligned}$$



- ▶ el análisis amortizado para una eliminación cuando $\alpha(T_{i-1}) < 0,5$ tiene que considerar si existe contracción o no
- ▶ eliminación **sin contracción**,

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= 1 + (tam_{i-1}/2 - (elem_{i-1} - 1)) - (tam_{i-1}/2 - elem_{i-1}) \\ &= 1 + 1 = 2 \in \Theta(1)\end{aligned}$$



- ▶ eliminación **con contracción**, o sea $\alpha(T_{i-1}) = 0,25$

$$\begin{aligned}\hat{c}_i &= c_i + \Phi(T_i) - \Phi(T_{i-1}) \\ &= (elem_{i-1} + 1) + (tam_i/2 - elem_i) - \\ &\quad (tam_{i-1}/2 - elem_{i-1}) \\ &= (elem_{i-1} + 1) + (tam_{i-1}/4 - (elem_{i-1} - 1)) - \\ &\quad (tam_{i-1}/2 - elem_{i-1}) \\ &= elem_{i-1} + 2 - tam_{i-1}/4 \\ &= tam_{i-1}/4 + 2 - tam_{i-1}/4 = 2 \in \Theta(1)\end{aligned}$$



- ▶ el análisis amortizado para una eliminación cuando $\alpha(T_{i-1}) \geq 0,5$ queda como **ejercicio**
- ▶ es necesario considerar dos subcasos: cuando la eliminación ocasiona que el factor de carga pase la cota, y cuando la eliminación mantiene el factor de carga por encima de la cota



Heaps asimétricos

- ▶ un **heap asimétrico** (o *skew heap*) es un árbol binario que respeta la propiedad de *heap*, no tiene restricciones estructurales, y soporta las operaciones `inserción`, `eliminarMin` y `mezcla`
- ▶ un árbol satisface la propiedad de *heap* si cumple que el nodo con menor valor está en la raíz, y todos sus subárboles también cumplen la propiedad de *heap*
- ▶ las operaciones tienen una implementación muy sencilla
- ▶ `inserción` y `eliminarMinimo` se implementan en base a `mezclar`

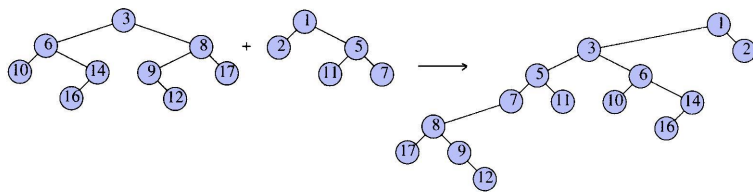


- ▶ la operación `mezclar` tiene una implementación particular

```
PROCEDURE mezcla(T1, T2)
  IF T1=nil and T2=nil THEN this:=T2; RETURN
  IF (T2=nil) or (T1!=nil and T1.raiz()<T2.raiz())
    this.setRaiz(T1.raiz())
    this.setHD(T1.hi())
    this.setHI(T1.mezcla(T2, T1.hd()))
  ELSE
    this.setRaiz(T2.raiz())
    this.setHD(T2.hi())
    this.setHI(T2.mezcla(T1, T2.hd()))
  ENDIF
RETURN
```



Ejemplo



- ▶ en la práctica esto corresponde a una mezcla de los caminos derechos, y el resultado se inserta como el nuevo camino izquierdo
- ▶ en el peor caso esta operación toma tiempo de $O(n)$ ya que puede eventualmente recorrer todos los nodos de ambos árboles
- ▶ el tiempo real de la mezcla lleva tiempo proporcional a la **cantidad de nodos en el camino derecho**
- ▶ pero como estos nodos pasan a continuación a estar en el camino izquierdo, las próximas mezclas no los considerarán
- ▶ amerita realizar un análisis amortizado de esta operación



- ▶ para realizar un análisis amortizado de la operación se toma como función potencial a la cantidad de **nodos pesados**: aquellos nodos que tienen al menos la mitad de sus descendientes en el subárbol derecho
- ▶ los nodos que no son pesados se denominan **livianos**.
- ▶ la función potencial vale 0 en el árbol vacío, y nunca es negativa, con lo que cualquier sumatoria de costos amortizados que comiencen en vacío es una cota de los costos reales



- ▶ en un *heap* asimétrico, siempre **la cantidad de nodos del camino derecho determina el tiempo de la operación mezcla**
- ▶ acotar estos nodos nos permite determinar los tiempos amortizados

Lema 1

Sea T un *heap* asimétrico de n elementos, entonces la cantidad de nodos livianos en el camino derecho es de $O(\log n)$.

Demostración.

Por inducción sobre la cantidad de nodos en el camino derecho. □



- ▶ el análisis amortizado de la operación *mezcla*, siendo p_1, p_2 y l_1, l_2 la cantidad de nodos pesados y livianos del camino derecho de cada árbol mezclado, es:

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= p_1 + l_1 + p_2 + l_2 + \Phi(T_3) - \Phi(T_1, T_2) \\ &\leq p_1 + l_1 + p_2 + l_2 - p_1 - p_2 + l_1 + l_2 \\ &= 2(l_1 + l_2) \in O(\log n_1 + \log n_2) = O(\log n) \end{aligned}$$

considerando que en una mezcla, **todos** los nodos pesados del camino derecho se transforman en nodos livianos en el resultado, mientras que **algunos** nodos livianos del camino derecho se transforman en nodos pesados



- ▶ las operaciones de *inserción* y *eliminarMinimo*, como dependen de la mezcla también tienen tiempo amortizado logarítmico
- ▶ esto implica que una serie de N operaciones sobre **skew heaps**, empezando de la estructura vacía, toman tiempo de $O(N \log n)$ en el peor caso.



Heaps de Fibonacci

- ▶ los **heaps de Fibonacci** son un tipo de estructuras de datos que implementa las operaciones de los denominados **mergeable heaps**
- ▶ es decir sus operaciones son:
 - ▶ `crearHeap()`
 - ▶ `minimo():Elemento`
 - ▶ `insertar(x:Elemento)`
 - ▶ `eliminarMinimo():Elemento`
 - ▶ `mezclar(H1, H2:FibHeap)`
 - ▶ `disminuirClave(x:Elemento, k:Clave)`
 - ▶ `eliminar(x:Elemento)`



- ▶ si no se necesita las tres últimas operaciones, los **heaps** binarios tradicionales constituyen una implementación eficiente
- ▶ sin embargo, la mezcla es de tiempo de $\Theta(n)$ y la modificación de clave de $\Theta(\log n)$ en el peor caso (**ejercicio**)
- ▶ los **heaps** asimétricos soportan eficientemente la operación de mezcla, **pero no la de disminuirClave**
- ▶ los **heaps** de Fibonacci **mejoran** los tiempos de las dos últimas operaciones, a costa de conservar los tiempos de las restantes sólo bajo **análisis amortizado** en lugar del peor caso
- ▶ para estos tiempos, **suponemos la búsqueda de un nodo resuelta**, ie en tiempo constante



- ▶ la implementación de los **heaps** de Fibonacci está basada en otra E.D., las **heaps binomiales** que también son **mergeable heaps**
- ▶ una **cola binomial** es una foresta de árboles binomiales que cumple con las siguientes propiedades:
 - ▶ cada árbol de la foresta cumple con la propiedad de **heap**.
 - ▶ existe en la foresta a lo sumo un árbol binomial de cada rango.
- ▶ un **árbol binomial** de rango k , notado B_k , se define inductivamente como: B_0 tiene un sólo nodo, y B_k se forma enlazando dos árboles binomiales de rango $k - 1$ de manera que uno sea el hijo extremo izquierdo del otro



Comparación heaps con mezcla

operación	Heaps binarios (peor caso)	Heaps binomiales (peor caso)	Heaps de Fibonacci (amortizado)
<code>crearHeap()</code>	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
<code>minimo()</code>	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
<code>insertar(x)</code>	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$	$\Theta(1)$
<code>eliminarMinimo()</code>	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$
<code>mezclar(H1, H2)</code>	$\Theta(n)$	$O(\log n)$	$\Theta(1)$
<code>disminuirClave(x, k)</code>	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$
<code>eliminar(x)</code>	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$



Propiedades árboles Binomiales (I)

Lema 2

Sea B_k el árbol binomial de grado k , entonces

1. B_k tiene 2^k nodos
2. B_k tiene altura k
3. en B_k existen exactamente $\binom{k}{i}$ nodos de profundidad i
4. la raíz de B_k es de grado k (cantidad de hijos), y sus hijos son (de izquierda a derecha) de grados $0, 1, \dots, k-2, k-1$

Demostración.

Queda como **ejercicio**, usar inducción sobre el grado k en todos los casos.



Propiedades árboles Binomiales (II)

Lema 3

El máximo grado de un nodo en un árbol binomial de n nodos es $\log n$.

Demostración.

Inmediato de las propiedades 1 y 4 del lema 2. □



Operaciones Heaps Binomiales

- ▶ las **heaps binomiales** son árboles binomiales que además cumplen con la propiedad de *heap*, o sea que el nodo con menor clave de un árbol está en la raíz, y todos sus subárboles también cumplen la propiedad de *heap*
- ▶ además también satisfacen que si el *heap* tiene n nodos entonces existen a lo sumo $\lfloor \log n \rfloor + 1$ árboles



- ▶ la **implementación de las operaciones** es la siguiente:
 - ▶ `crearHeap()` produce una foresta vacía, y es de $\Theta(1)$.
 - ▶ `minimo()` se puede implementar manteniendo un puntero al árbol con menor clave en tiempo $\Theta(1)$
 - ▶ `mezclar(H1, H2)` se puede realizar mediante a un proceso análogo a la suma binaria, componiendo árboles binomiales de rangos repetidos en un árbol de rango mayor. Esto lleva tiempo de $\Theta(\log n)$
 - ▶ `eliminarMinimo()` e `insertar(x)` se implementan en base a la operación de mezcla
 - ▶ `disminuirClave(x, k)` debe recorrer a lo sumo la máxima altura del árbol más alto en la foresta, lo que es de $O(\log n)$ de acuerdo a las propiedades vistas.
 - ▶ `eliminar(x)` se implementa disminuyendo la clave del elemento al mínimo posible, y luego llamando a `eliminarMinimo()`

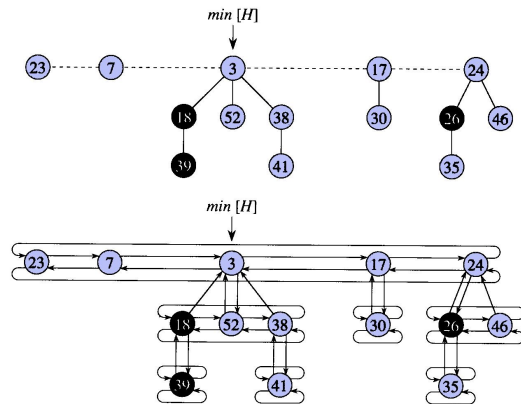


Heaps de Fibonacci

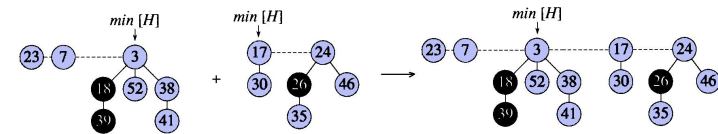
- ▶ un **heap de Fibonacci** se basa en los **heaps** binomiales. Están formados por una foresta de árboles, los cuales se inician como árboles binomiales.
- ▶ la diferencia está en que a medida que se ejecutan las operaciones **no necesariamente siempre estos árboles mantienen su estructura binomial**
- ▶ su utilización sería útil en algoritmos como el de Dijkstra para los caminos más cortos con origen único, donde en cada iteración de ciclo *greedy* no sólo se necesita seleccionar el nodo más próximo en el *heap*, sino también disminuir la distancia de los restantes nodos



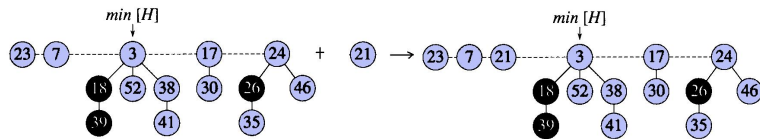
- ▶ las operaciones sobre los **heaps de Fibonacci** se diferencian de las de los **heaps** binomiales en dos aspectos:
 - ▶ **mezcla perezosa**: dos **heaps** se mezclan simplemente **uniendo las forestas**. Esto implica que no siempre exista un único árbol de cada rango. Favorece el tiempo de **mezcla** e **inserción**, pero aumenta el de **eliminarMínimo**.
 - ▶ **cortes** para mejorar el tiempo del **percolate** en la implementación de **eliminarMínimo**. Entonces cuando un nodo tiene clave menor que el padre, se elimina **cortando el subárbol** y agregándolo como un árbol nuevo a la foresta. Favorece el **disminuirClave**, pero perjudica a **eliminarMínimo**
 - ▶ **cortes en cascada** si un padre ha perdido más de un hijo, lo que asegura mantener la cantidad de descendientes de todos los nodos



- ▶ la operación de **Mezcla** de dos **heaps de Fibonacci**, como se implementa como **mezcla perezosa**, sólo realiza **la unión de las dos forestas y calcula el nuevo mínimo**



- ▶ la operación de Inserción se implementa simplemente agregado el nodo a insertar como nuevo árbol en la foresta



- ▶ la operación de EliminarMinimo es la encargada de restaurar la propiedad de que la foresta sea una colección de árboles donde existe a lo sumo uno de cada rango
- ▶ la implementación utiliza un procedimiento auxiliar consolidar() que controlan que para cada árbol no existe otro de su rango
- ▶ si esto sucede, los mezcla y crea un árbol de rango superior



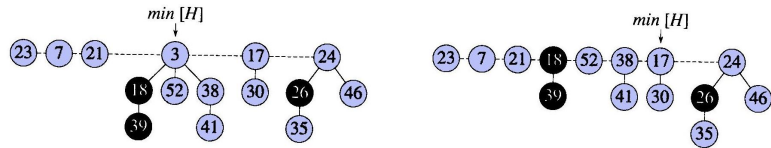
```
PROCEDURE EliminarMinimo()  
  z:=this.minimo()  
  IF z!=nil  
    FOR cada hijo x de z  
      agregar x a la foresta  
    ENDFOR  
    eliminar z de la foresta  
    this.consolidar()  
  ENDFIF  
  RETURN z
```



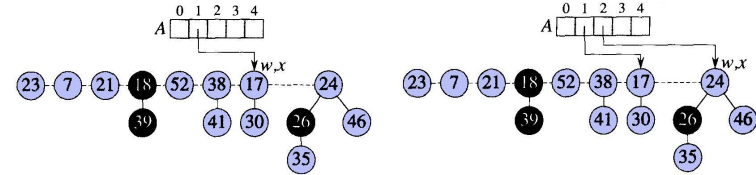
```
PROCEDURE consolidar()  
  array grados[1..n]::=0  
  FOR cada raíz w de un árbol de la foresta  
    d:=w.grado(); x:=w  
    WHILE grados[d]!=0  
      y:=grados[d]  
      IF x.clave()>y.clave()  
        intercambiar(x,y)  
      ENDFIF  
      unir x e y en x  
      grados[d]::=0; d++  
    ENDWHILE  
    grados[d]::=x  
  ENDFOR  
  actualizar mínimo
```



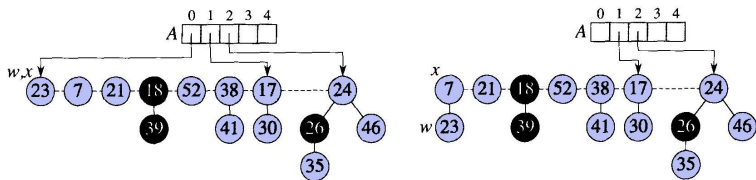
Ejemplo eliminarMinimo () (I)



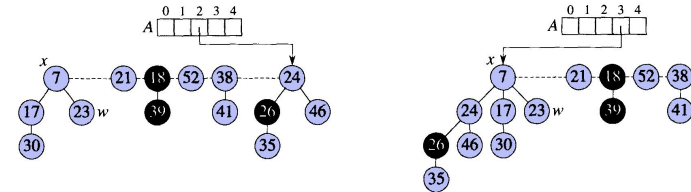
Ejemplo eliminarMinimo () (II) - consolidar



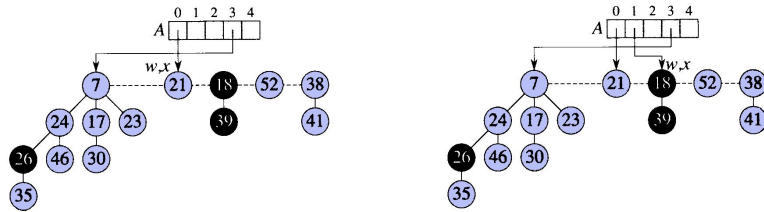
Ejemplo eliminarMinimo () (III) - consolidar



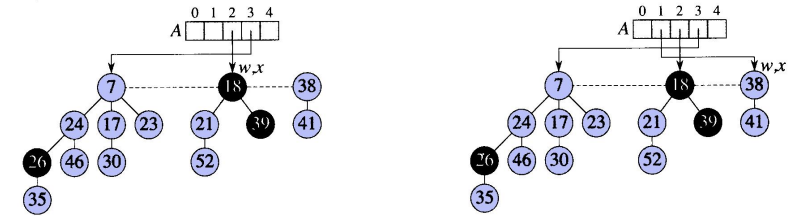
Ejemplo eliminarMinimo () (IV) - consolidar



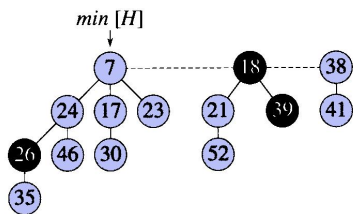
Ejemplo eliminarMinimo() (V) - consolidar



Ejemplo eliminarMinimo() (VI) - consolidar



Ejemplo eliminarMinimo() (VII) - consolidar



- ▶ la operación `disminuirClave` debe implementarse en **tiempo amortizado constante**, por lo que no es posible hacer un percolate por el árbol
- ▶ se supone que el nodo x ya viene dado. Si cuando se disminuye la clave se viola la propiedad de *heap*, entonces el nodo es **cortado del árbol** al que pertenece y se inserta como un árbol independiente en la foresta
- ▶ para asegurar que un nodo no pierda demasiados descendientes (y por lo tanto asegurar el tiempo amortizado del `eliminarMinimo`), entonces **se marca el nodo que pierde un hijo por primera vez**
- ▶ si un nodo pierde un segundo hijo, entonces **también es cortado**, se agrega su subárbol como árbol independiente en la foresta, y se procede con el padre




```
PROCEDURE DisminuirClave(x, k)
  clave[x] ::= k; y ::= padre[x]
  IF y != nil y clave[x] < clave[y]
    H.corte(x, y)
    H.corteCascada(y)
  ENDIF
  IF clave[x] < clave[H.minimo()]
    H.setMinimo(x)
  ENDIF
```



```
PROCEDURE corte(x, y)
  eliminar x de la lista de hijos de y,
  actualizando su rango
  agregar x a la foresta
  marcado[x] ::= false
```



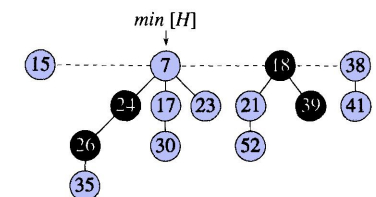
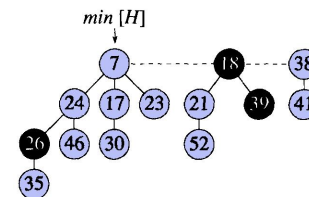
```
PROCEDURE corteCascada(y)
  z ::= padre[y]
  IF z != nil
    IF no marcado[y]
      marcado[y] ::= true
    ELSE
      H.corte(y, z)
      H.corteCascada(z)
    ENDIF
  ENDIF
```

- ▶ una llamada a DisminuirClave tiene como costo real 1 más la cantidad de cortes en cascada



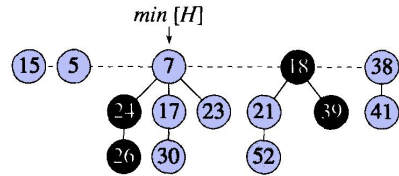
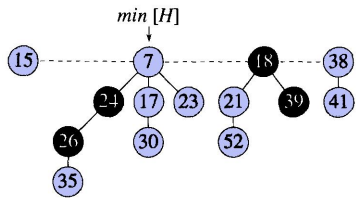
Ejemplos (I)

- ▶ disminuirClave(46, 15)

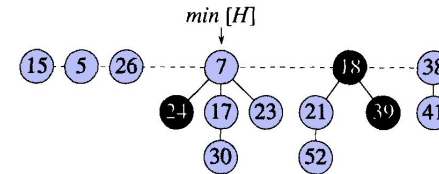


Ejemplos (II)

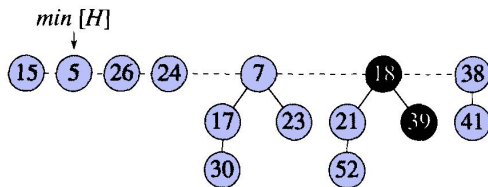
► disminuirClave(35, 5)



Ejemplos (III)



Ejemplos (IV)



Análisis amortizado de las operaciones

- para realizar el análisis amortizado de esta E.D. se usa como función potencial:

$$\Phi(H) = \text{arboles}(H) + 2 \times \text{marcados}(H)$$

- esta función satisface los requisitos para una función potencial comenzando del heap vacío



- ▶ en la operación `insertar` se agrega un árbol y los nodos marcados no cambian, luego:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(H_i) - \Phi(H_{i-1}) = \Theta(1) + 1 \in \Theta(1)$$

- ▶ en la operación `mezcla` la cantidad de árboles y nodos marcados no cambian:

$$\hat{c}_i = c_i + \Phi(H_i) - \Phi(H_{i-1}) = \Theta(1) + 0 \in \Theta(1)$$

- ▶ para la operación `eliminarMinimo` serán necesarias algunas propiedades, que veremos a continuación



Lema 5

Sean F_k los números de Fibonacci, luego $\sum_{i=0}^k F_i = F_{k+2} - 1$.

Demostración.

Por inducción sobre k . Si $k = 0$ es trivial. Suponiendo que vale para $k - 1$, entonces

$$\sum_{i=0}^k F_i = \sum_{i=0}^{k-1} F_i + F_k = (F_{k+1} - 1) + F_k = F_{k+2} - 1. \quad \square$$

- ▶ se nota con $des(x)$ la cantidad de descendientes de un nodo x



Lema 4

Sea x un nodo en un heap de Fibonacci tal que $\text{grado}[x] = k$. Entonces para todo hijo $y_i, 2 \leq i \leq k$ vale que $\text{grado}[y_i] \geq i - 2$.

Demostración.

En un Heap de Fibonacci la única posibilidad de y_i sea colocado como hijo de x es que $\text{grado}[x] = \text{grado}[y_i]$. Y como y_i es el i -ésimo hijo, en ese momento tanto x como y_i tenían $i - 1$ hijos. Luego y_i pierde a lo sumo un hijo, con lo que $\text{grado}[y_i] \geq i - 2$. \square



Teorema 6

Sea x un nodo de un heap de Fibonacci tal que $\text{grado}[x] = k$. Entonces la cantidad de descendientes de x es al menos F_{k+2} .

Demostración.

Por inducción sobre el rango k de x . Si $k = 0$ vale. Si $k > 1$, sean y_1, \dots, y_k los hijos de x en el orden de inserción. Entonces

$$\begin{aligned} des(x) &= 1 + 1 + \sum_{i=2}^k des(y_i) \geq 1 + 1 + \sum_{i=2}^k F_i = \\ &= 1 + \sum_{i=0}^k F_i = 1 + F_{k+2} - 1 = F_{k+2} \end{aligned}$$



Corolario 7

El rango de un nodo en un heap de Fibonacci de n nodos es siempre $O(\log n)$.

Demostración.

Sea x un nodo de un heap de Fibonacci tal que $\text{rango}[x] = k$. Por el teorema 6, $n \geq s(x) \geq F_{k+2} \geq \phi^k$. Luego $k \leq \log_\phi n \in O(\log n)$. \square

- ▶ retomando el análisis amortizado de `eliminarMinimo()`, sea r el grado de la raíz que contiene la menor etiqueta, T la cantidad de árboles en el momento $i - 1$ y n la cantidad de elementos almacenados



- ▶ el costo real de la operación es $T + r$, y los nodos marcados no cambian

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(H_i) - \Phi(H_{i-1}) = T + r + O(\log n) - T \\ &\leq r + O(\log n) \leq O(\log n) + O(\log n) \in O(\log n) \end{aligned}$$

usando el corolario anterior para acotar r y la cantidad de árboles después de la consolidación (ya que el rango máximo de un nodo es una cota de la cantidad máxima de árboles)



- ▶ en la operación `disminuirClave` el costo real es 1 más la cantidad de cortes en cascada C
- ▶ sea M la cantidad de nodos marcados antes de la operación. La cantidad de árboles aumenta en $1 + C$, C nodos marcados dejan de serlo, y un nodo no marcado pasa a marcado

$$\begin{aligned} \hat{c}_i &= c_i + \Phi(H_i) - \Phi(H_{i-1}) \\ &\leq 1 + C + (T + 1 + C + 2(M - C + 1)) - (T + 2M) = \\ &= 4 \in \Theta(1) \end{aligned}$$



Comparación heaps con mezcla

operación	Heaps binarios (peor caso)	Heaps binomiales (peor caso)	Heaps de Fibonacci (amortizado)
<code>crearHeap()</code>	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$	$\Theta(1)$
<code>minimo()</code>	$\Theta(1)$	$O(\log n)$	$\Theta(1)$
<code>insertar(x)</code>	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$	$\Theta(1)$
<code>eliminarMinimo()</code>	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$
<code>mezclar(H1, H2)</code>	$\Theta(n)$	$O(\log n)$	$\Theta(1)$
<code>disminuirClave(x, k)</code>	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$\Theta(1)$
<code>eliminar(x)</code>	$\Theta(\log n)$	$\Theta(\log n)$	$O(\log n)$

