Algoritmos y Complejidad

Técnicas y Herramientas

Pablo R. Fillottrani

Depto. Ciencias e Ingeniería de la Computación
Universidad Nacional del Sur

Primer Cuatrimestre 2017

Técnicas y Herramientas

- pruebas por contradicción
- pruebas por inducción
  - principio de inducción
  - inducción matemática generalizada
  - inducción constructiva

Herramientas ya conocidas. Leer apunte disponible en la página web.

- Lógica: cálculo proposicional y de predicados.
- Teoría de Conjuntos: operaciones básicas, producto cartesiano, cardinalidad.
- Teoría de Números: módulo, intervalos, techo y piso.
- Elementos básicos de álgebra y análisis: funciones, relaciones, series, sumatorias y productos, límites, módulos, logaritmos.
- Probabilidades: probabilidad condicional, esperanza, varianza.
- Combinatoria: permutaciones, combinaciones.

En el final del apunte se presenta un compendio de fórmulas útiles sobre estos temas.

Objetivos

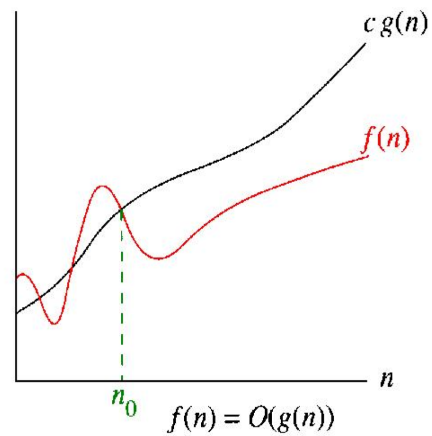
- no interesa conocer los valores absolutos de las funciones
- permitir una caracterización simple de la eficiencia de un algoritmo y comparar las performances relativas de distintos algoritmos
- independizar el análisis de los algoritmos de condiciones específicas de implementación: lenguaje de programación, compilador, equipo, etc.

- se aplica a funciones de tiempo de ejecución o de espacio de memoria de algoritmos en base a la longitud de la entrada: $f(n) : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}^+$
- se denomina asintótica porque analiza el comportamiento de las funciones en el *límite*, es decir su tasa de crecimiento

Notación $O(\cdot)$

$$\begin{aligned} O(g(n)) \quad = \quad & \{f(n) : \exists c \in \mathbf{R}^+, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{tal que} \\ & \qquad f(n) \leq cg(n) \text{ para todo } n \geq n_0\} \end{aligned}$$

- determina una cota superior en la tasa de crecimiento de una función, dentro de un factor constante
- ejemplos:
  - $6n^3 \in O(n^3)$ ya que se cumple la definición con $c = 6, n_0 = 1$
  - $3\log n \in O(n)$ ya que se cumple la definición con $c = 1, n_0 = 4$



$f(n) = O(g(n))$

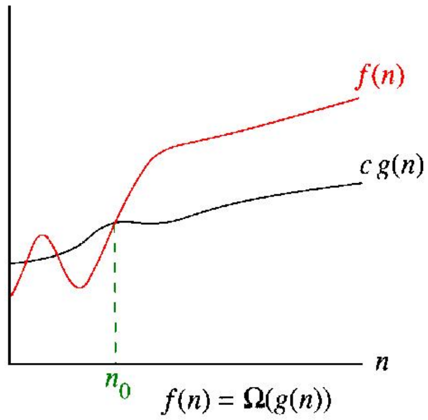
Ejemplos:

- $300n^2 \in O(n^2)$
- $5n^4 - 4n^3 + 10n^2 + 39 \in O(n^4)$
- $\log_b n \in O(\log_a n), \forall a, b$
- $2^n \in O(n!)$
- $500000n \in O(0{,}00001n^2)$
- $0{,}000001n^2 \notin O(500000n)$
- $n! \notin O(2^n)$

Notación $\Omega(\cdot)$

$$\Omega(g(n)) \;=\; \{f(n) : \exists c \in \mathbf{R}^+, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{tal que } f(n) \geq cg(n) \text{ para todo } n \geq n_0\}$$

- determina una cota inferior en la tasa de crecimiento de una función, dentro de un factor constante
- ejemplos:
  - $6n^3 \in \Omega(n^3)$ ya que se cumple la definición con $c = 1, n_0 = 1$
  - $1/3n \in \Omega(\log n)$ ya que se cumple la definición con $c = 1/3, n_0 = 1$



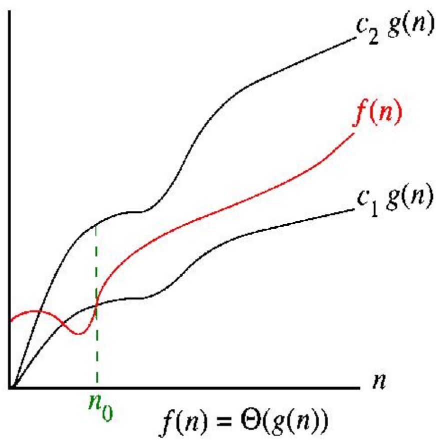
Ejemplos:

- $3n^5 + 4n^3 - 8n^2 + 10n \in \Omega(n^4)$
- $\log_b n \in \Omega(\log_a n), \forall a, b$
- $n! \in \Omega(2^n)$
- $0{,}00001n^2 \in \Omega(50000n)$
- $50000n \notin \Omega(0{,}00001n^2)$
- $2^n \notin \Omega(n!)$

Notación $\Theta(\cdot)$

$$\Theta(g(n)) \;=\; \{f(n) : \exists c, d \in \mathbf{R}^+, \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ tal que } cg(n) \leq f(n) \leq dg(n) \text{ para todo } n \geq n_0\}$$

- determina una cota superior e inferior en la tasa de crecimiento de una función, dentro de un factor constante
- ejemplos:
  - $6n^3 \in \Theta(n^3)$ ya que se cumple la definición con $c = 6, d = 6, n_0 = 1$.
  - $1/3n \in \Theta(n)$ ya que se cumple la definición con $c = 1/5, d = 1, n_0 = 1$.



Ejemplos:

- $3n^2 \in \Theta(n^2)$
- $\log n \notin \Theta(n)$
- $2^{n+1} \in \Theta(2^n)$
- $500000n^2 \in \Theta(0{,}00001n^2)$
- $\log_b n \in \Theta(\log_a n)$ para todo $a, b > 0$

Uso en Ecuaciones

- por ejemplo, $f(n) = 2n^2 + \Theta(n)$ significa que $f(n)$ es igual a $2n^2$ *más alguna función cualquiera perteneciente a* $\Theta(n)$
- $2n^2 + O(n) = O(n^2)$ significa que *no importando que función perteneciente a* $O(n)$ *se sume a* $2n^2$*, siempre el resultado es una función en* $O(n^2)$
- $f(n) = O(g(n)) + O(h(n))$ significa que $f(n)$ es una función que se puede obtener *sumando punto a punto una función de* $O(g(n))$ *con una función de* $O(h(n))$
- se evita hacer referencia a detalles que no afectan el comportamiento general de la función

Algunas Propiedades útiles

- $O(f_1(n) + f_2(n)) = O(\max(f_1(n), f_2(n)))$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ si y solo si $g(n) \in \Theta(f(n))$
- $f(n) \in O(g(n))$ si y solo si $g(n) \in \Omega(f(n))$
- $f(n) \in \Theta(g(n))$ si y solo si $f(n) \in O(g(n)) \wedge f(n) \in \Omega(g(n))$
- si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} \in \mathbf{R}^+$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$
- si $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$ entonces $f(n) \in O(g(n))$ pero $g(n) \notin O(f(n))$

ORDENAR UN ARREGLO

Algoritmo: Ordenamiento por Inserción

- Costo de la ejecución del algoritmo:

$$\begin{aligned} T_I(n) &= c_1 n + c_2(n-1) + c_3(n-1) + c_4 \sum_{j=1}^{n-1} t_j + c_5 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + \\ &\quad + c_6 \sum_{j=1}^{n-1} (t_j - 1) + c_8(n-1) \\ &= (c_1 + c_2 + c_3 + c_8)n - (c_2 + c_3 + c_8) + (c_4 + c_5 + c_6) \sum_{j=1}^{n-1} t_j - (c_5 + c_6) \sum_{j=1}^{n-1} 1 \end{aligned}$$

- para analizar el $O(\cdot)$ se tiene:

$$\begin{aligned} T_I(n) &= d_1 n - d_2 + d_3 \sum_{j=1}^{n-1} t_j - d_4 \sum_{j=1}^{n-1} 1 \\ &\leq d_1 n + d_3 \sum_{j=1}^{n-1} t_j \\ &\leq d_1 n + d_3 \sum_{j=1}^{n-1} n \\ &= d_1 n + d_3 n(n-1) \\ &\leq d_1 n + d_4 n^2 \end{aligned}$$

- luego $T(n) \in O(n^2)$.

- para analizar el $\Omega(\cdot)$ se tiene:

$$\begin{aligned} T_I(n) &= d_1 n - d_2 + d_3 \sum_{j=1}^{n-1} t_j - d_4 \sum_{j=1}^{n-1} 1 \\ &\geq d_1 n - d_2 + d_3 \sum_{j=1}^{n-1} j - d_4(n-1) \\ &= d_1 n - d_2 + d_3(n-1)n/2 - d_4(n-1) \\ &\geq \frac{d_3}{2} n^2 + d_1 n - (\frac{d_3}{2} + d_4)n - (d_2 + d_4) \quad \in \Omega(n^2) \end{aligned}$$

- recordemos que $T(n)$ es el tiempo de ejecución en el peor caso para instancias de tamaño n
- luego $T(n) \in \Omega(n^2)$ y por lo tanto también $T(n) \in \Theta(n^2)$

NÚMERO DE FIBONACCI

Algoritmo: algoritmo iterativo simple

- para analizar el $O(\cdot)$ se tiene:

$$T_{FIB2}(n) = b + \sum_{k=1}^{n} (c_1 + c_2 + c_3) + d \leq fn$$

- luego $T_{FIB2}(n) \in O(n)$
- para analizar el $\Omega(\cdot)$ se tiene:

$$T_{FIB2}(n) = b + \sum_{k=1}^{n} (c_1 + c_2 + c_3) + d \geq \sum_{k=1}^{n} (c_1 + c_2 + c_3) \geq n$$

- luego $T_{FIB2}(n) \in \Omega(n)$, y por lo tanto también $T_{FIB2}(n) \in \Theta(n)$

Notación Asintótica Condicional

- muchos algoritmos son más fáciles de analizar si se restringe la atención a instancias cuyos tamaños satisfacen determinadas condiciones

$$\begin{aligned} O(g(n) \mid P(n)) = \{ \quad & f(n) : \exists c \in \mathbf{R}^+ \exists n_0 \in \mathbf{N}, \text{ tal que} \\ & f(n) \leq cg(n) \text{para todo } n \geq n_0 \\ & \text{siempre que } P(n) \ \} \end{aligned}$$

- análogamente, se definen $\Omega(g(n) \mid P(n))$ notación omega condicional, y $\Theta(g(n) \mid P(n))$ notación Θ condicional

- por ejemplo, $t(n) \in \Theta(n^2 \mid n = 2^k)$ significa que si n es potencia de 2 entonces $t(n) \in \Theta(n^2)$
- nada se está afirmando sobre $t(n)$ si n no es potencia de 2

NÚMERO DE FIBONACCI

Algoritmo: algoritmo iterativo complejo

$$T_{FIB3}(n) = c1 + \sum_{k=1}^{\log n} c2 + \sum_{k=1}^{\log n} c3$$

- si $n = 2^k$ entonces

$$T_{FIB3}(n) = c1 + \sum_{k=1}^{\log n} c3 \leq d \log n$$

- y entonces $T_{FIB3}(n) \in O(\log n \mid n = 2^k)$

- si $n = 2^k - 1$ entonces

$$T_{FIB3}(n) = c1 + \sum_{k=1}^{\log n} (c2 + c3) \leq e \log n$$

- y entonces $T_{FIB3}(n) \in O(\log n \mid n = 2^k - 1)$
- analizando que este último caso es el peor de los casos posible se puede concluir que $T_{FIB3}(n) \in O(\log n)$

Regla de las Funciones de Crecimiento Suave

- sirve para extender lo analizado condicionalmete a todos los tamaños de entrada

Teorema 1
Sea $f : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ una función de crecimiento suave, y $t : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ una función eventualmente no decreciente. Luego siempre que $t(n) \in \Theta(f(n) \mid n = b^k)$ para algún entero $b \geq 2$, entonces $t(n) \in \Theta(f(n))$

Definición
una función $f(n) : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ es eventualmente no decreciente si existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que para todo $n \geq n_0$ vale $f(n) \leq f(n+1)$

Definición
una función $f(n) : \mathbf{N} \longrightarrow \mathbf{R}^+$ es de crecimiento suave si existe $b \in \mathbf{N}, b \geq 2$ tal que $f(n)$ es eventualmente no decreciente y $f(bn) \in O(f(n))$

- la mayoría de las funciones que se encuentran son de crecimiento suave: $\log n$, n, $n \log n$, n^2, o cualquier polinomio con coeficiente principal positivo
- funciones tales como $n^{\log n}$, 2^n o $n!$ no son de crecimiento suave
- reglas análogas también son válidas para $O(\cdot)$ y $\Omega(\cdot)$

Ejemplo

- si $t(n)$ es
$$t(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1 \\ 4t(\lceil n/2 \rceil) + bn & \text{sino} \end{cases}$$
- entonces es fácil probar (usando los métodos de resolución de recurrencias que se verán) que $t(n) = (a+b)n^2 - bn$ si $n = 2^k$, ie $t(n) \in \Theta(n^2 \mid n = 2^k)$
- luego, como n^2 es una función de crecimiento suave y $t(n)$ es eventualmente no decreciente (¿porqué?) se puede aplicar la regla de las funciones de crecimiento suave y concluir que $t(n) \in \Theta(n^2)$ para todo n

- es necesario un manejo fluído de las siguientes estructuras de datos:
  - Arreglos y Matrices
  - Listas simplemente enlazadas, Pilas y Colas
  - Grafos, implementados mediante matriz o lista de adyacencia
  - árboles
  - Tablas Asociativas (*Hash*)
  - Colas con Prioridad (*Heaps*), implementados por árboles binarios completos
  - Conjuntos Disjuntos

ORDENAR UN ARREGLO

Algoritmo: Heapsort (ordenamiento por construcción de un *heap*)

	costo	veces
`FUNCTION Heapsort(A)`		
`Construir Heap(A)`	$\Theta(n)$	1
`FOR i ::= n DOWNTO 2`	c_1	$\sum_{i=2}^{n} 1$
`    A[1] <=> A[i]`	c_2	$\sum_{i=2}^{n} 1$
`   A.tamaño- -`	c_3	$\sum_{i=2}^{n} 1$
`   A.heapify(1)`	$\Theta(\log n)$	$\sum_{i=2}^{n} 1$
`ENDFOR`		

- calculando el tiempo de ejecución se tiene:

$$\begin{aligned} T_H(n) &= \Theta(n) + \sum_{i=2}^{n}(c_1 + c_2 + c_3 + \Theta(\log n)) = \\ &= \Theta(n) + \Theta(n \log n) \in \Theta(n \log n) \end{aligned}$$

- es fundamental en este ejemplo usar la implementación más eficiente para las operaciones de la estructura de datos

Secuencia

```
Algoritmo  A
  P1
  P2
```

- sea $t_A(n)$ la cantidad de recursos a analizar.
- si $P1$ insume $\Theta(f_1(n))$ recursos y $P2$ insume $\Theta(f_2(n))$ recursos, entonces

$$\begin{aligned} t_A(n) &= \Theta(f_1(n)) + \Theta(f_2(n)) = \Theta(f_1(n) + f_2(n)) = \\ &= \Theta(\max(f_1(n), f_2(n))) \end{aligned}$$

Condicional

```
Algoritmo  A
  IF (X)
     P1
  ELSE
     P2
  ENDIF
```

- el tiempo en el peor de los casos es

$$\begin{aligned} t_A(n) &= t_X(n) + \max(t_{P1}(n), t_{P2}(n)) = \\ &= O(\max(t_X(n), t_{P1}(n), t_{P2}(n))) \end{aligned}$$

- y también

$$\begin{aligned} t_A(n) &\geq c + \max(\Theta(f_1(n)), \Theta(f_2(n))) = \\ &= \Omega(\max(c, f_1(n), f_2(n))) \end{aligned}$$

- si el $O(\cdot)$ y el $\Omega(\cdot)$ coinciden, entonces se puede definir el $\Theta(\cdot)$

Ciclo FOR

```
Algoritmo B
  FOR i ::= 1 TO m
     P(i)
  ENDFOR
```

- sean c_1, c_2, c_3 los costos de las operaciones elementales
- si $P(i)$ insume t recursos (no depende de i ni de m) entonces

$$
\begin{aligned}
t_B(n) &= c_1 + (m+1)c_3 + mt + mc_2 = \\
&= (c_2 + c_3 + t)m + (c_1 + c_3) \in \Theta(mt)
\end{aligned}
$$

- si $P(i)$ insume $t(i)$ recursos (dependiendo de i, del tamaño n de la instancia, o de cada instancia en particular) entonces

$$
t_B(n) = \sum_{i=1}^{m} t(i)
$$

- para obtener el $O(\cdot)$ o el $\Omega(\cdot)$ de esta función se pueden usar las distintas propiedades vistas para obtener la notación asintótica

ORDENAR UN ARREGLO

Algoritmo: Ordenamiento por Selección

	costo	veces
`FOR i ::= 1 TO n-1`	a	n
`   ind ::= i;  min ::= A[i]`	b	$n-1$
`   FOR j ::= i+1 TO n`	c	$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n+1} 1$
`      IF (A[j]<min)`	c	$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1$
`         min ::= A[j]`	c	$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1$
`         ind ::= j`	c	$\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} 1$
`      ENDIF`		
`   ENDFOR`		
`   A[ind] ::= A[i]; A[i] ::= min`	b	$n-1$
`ENDFOR`		

- calculando la cantidad de recursos se tiene

$$
\begin{aligned}
T_S(n) &= a + \sum_{i=1}^{n-1}(a + b + (n-i)c) \\
&= a + \sum_{i=1}^{n-1}(a + b + cn) - c\sum_{i=1}^{n-1} i = \\
&= a + (n-1)(a + b + cn) - cn(n-1)/2 \\
&= a + \frac{cn^2}{2} + (a + b - \frac{c}{2})n - (a+b) \in \Theta(n^2)
\end{aligned}
$$

NÚMERO DE FIBONACCI

Algoritmo: primer algoritmo iterativo (sumas y restas son operaciones elementales)

	costo	veces
`Function FIB2(n)`		
`i ::= 1; j ::= 0`	b	1
`FOR k ::= 1 TO n`	c_1	$\sum_{k=1}^{n+1} 1$
`j ::= i+j`	c_2	$\sum_{i=1}^{n} 1$
`i ::= j-i`	c_3	$\sum_{i=1}^{n} 1$
`ENDFOR`		
`RETURN j`	d	1

- calculando el tiempo de ejecución se tiene

$$\begin{aligned} T_{FIB2}(n) &= b + c_1 + \sum_{k=1}^{n}(c_1+c_2+c_3) + d = \\ &= (b+d) + (c_1+c_2+c_3)n \in \Theta(n) \end{aligned}$$

- si la suma y la resta no son operaciones elementales (operan sobre números muy grandes) entonces

	costo	veces
`Function FIB2(n)`		
`i ::= 1; j ::= 0`	b	1
`FOR k ::= 1 TO n`	c_1	$\sum_{k=1}^{n} 1$
`j ::= i+j`	$c_2 * tamaño(j)$	$\sum_{i=1}^{n} 1$
`i ::= j-i`	$c_3 * tamaño(j)$	$\sum_{i=1}^{n} 1$
`ENDFOR`		
`RETURN j`	d	1

- resultando

$$\begin{aligned} T_{FIB2}(n) &= b + \sum_{k=1}^{n}(c_1 + (c_2+c_3) * tamaño(j)) + d = \\ &\leq (b+d) + \sum_{k=1}^{n}(c_1 + (c_2+c_3) * tamaño(F_k)) \\ &\leq (b+d) + nc_1 + \sum_{k=1}^{n} dk \;\; \text{por} \;\; tamaño(F_k) \in \Theta(k) \\ &= (b+d) + nc_1 + d\frac{n(n+1)}{2} = \\ &= (b+d) + nc_1 + \frac{d}{2}n^2 + \frac{d}{2}n \in O(n^2) \end{aligned}$$

Ciclos WHILE y REPEAT

- no es tan fácil para los casos de ciclos **repeat** o **while**, no se sabe cuántas veces serán ejecutados.
- algunas de las técnicas a aplicar pueden ser:
  1. encontrar una función en las variables involucradas cuyo valor decrezca en cada iteración, y que sea siempre positiva
  2. tratar la iteración como si fuese un procedimiento recursivo, y aplicar el método para recursividad
  3. elegir como cota del cuerpo del bucle el tiempo de ejecución de una de sus sentencias, la cual se denomina barómetro. Luego se debe contar cuántas veces se ejecuta el barómetro
- ningún método es aplicable para todos los casos, y solo a través de la experiencia se puede detectar cuál usar

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Algoritmo: Algoritmo de Euclides

```
Function EUCLIDES(m,n)
   WHILE m>0
      temp ::= m
      m ::= n mod m
      n ::= temp
   ENDWHILE
   RETURN n
```


- se puede observar las propiedades:
  - $n_i = m_{i-1}$, $m_i = n_{i-1} \bmod m_{i-1}$ siempre que $i \geq 1$
  - $n_i \geq m_i$ siempre que $i > 1$
  - para todo n, m tal que $n \geq m$ vale $n \bmod m < n/2$
  - $n_i = m_{i-1} = n_{i-2} \bmod m_{i-2} < n_{i-2}/2$ si $i > 2$
- luego, en dos iteraciones n_0 se reduce a menos de la mitad; en cuatro a menos del cuarto; etc. Como $m_i > 0$ entonces no puede haber más de $2\log_2 n_0$ iteraciones. Y $T(n) \in O(\log n)$.

ORDENAR UN ARREGLO

Algoritmo: Ordenamiento por Cubículos (enteros hasta s)

```
array U[1..s] ::= 0                         Θ(n)
FOR i ::= 1 TO n
   k ::= T[i]; U[k]++                       Θ(1)
ENDFOR
i ::= 0
FOR k ::= 1 TO s
   WHILE U[k] != 0                          barómetro
      T[i++] ::= k; U[k]- -
   ENDWHILE
ENDFOR
```

- el barómetro se ejecuta $U[k]_0 + 1$ veces por cada k
- luego el tiempo total es: $\sum_{k=1}^{s}(U[k]_0 + 1)\Theta(1)$
- y vale

$$\begin{aligned} T(n) &= \Theta(n) + \Theta(1) + \sum_{k=1}^{s}(U[k]_0 + 1)\Theta(1) = \\ &= \Theta(n) + \sum_{k=1}^{s} U[k]_0\Theta(1) + \sum_{k=1}^{s}\Theta(1) \\ &= \Theta(n) + \Theta(n) + \Theta(s) \in \Theta(\max(n, s)) \end{aligned}$$

- el problema de este algoritmo es el límite máximo de los números a utilizar, y el espacio de memoria auxiliar

- una simple inspección del algoritmo da origen a una recurrencia, que “simula” el flujo de control del algoritmo

```
function F(n)
   IF (x)
      P1(n)
   ELSE
      P2(n)
      F(m);    % con m<n
   ENDIF
```

- $t(n) \in O(max(t_{P1}(n), t_{P2}(n) + t(m)))$
- luego se debe aplicar algún método para resolver la recurrencia

ELEMENTO MAYOR

```
Function MAXIMO(T)
   IF n=1
      RETURN T[1]
   ELSE
      x ::= MAXIMO(T[1..n-1])
      IF (x>T[n])
         RETURN x
      ELSE
         RETURN T[n]
      ENDIF
   ENDIF
```


- genera la siguiente recurrencia:

$$T_{MAX}(n) = \begin{cases} a & \text{si } n = 1. \\ b + T(n-1) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

NÚMERO DE FIBONACCI

Algoritmo: algoritmo recursivo

```
function FIB1(n)
   IF n<2
      RETURN n
   ELSE
      RETURN (FIB1(n-1)+FIB1(n-2))
   ENDIF
```

- que genera la recurrencia

$$T_{FIB1}(n) = \begin{cases} a & \text{si } n < 2 \\ T_{FIB1}(n-1) + T_{FIB1}(n-2) + b & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

- veremos dos técnicas básicas y una auxiliar que se aplican a diferentes clases de recurrencias:

Técnicas de Resolución de Recurrencias:
- método del teorema maestro
- método de la ecuación característica
- cambio de variables

- no analizaremos su demostración formal, sólo consideraremos su aplicación para las recurrencias generadas a partir del análisis de algoritmos

Método del Teorema Maestro

- se aplica en casos como:

$$T(n) = \begin{cases} 5 & \text{si } n = 0 \\ 9T(n/3) + n & \text{si } n \neq 0 \end{cases}$$

- es importante identificar:
  - la cantidad de llamadas recursivas
  - el cociente en el que se divide el tamaño de las instancias
  - la sobrecarga extra a las llamadas recursivas

Teorema 2

Sean $a \geq 1$, $b > 1$ constantes, $f(n)$ una función y $T(n)$ una recurrencia definida sobre los enteros no negativos de la forma $T(n) = aT(n/b) + f(n)$, donde n/b puede interpretarse como $\lfloor n/b \rfloor$ o $\lceil n/b \rceil$ Entonces valen:

1. *si $f(n) \in O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$ entonces $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$.*
2. *si $f(n) \in \Theta(n^{\log_b a})$ entonces $T(n) \in \Theta(n^{\log_b a} \lg n)$.*
3. *si $f(n) \in \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ para algún $\varepsilon > 0$, y satisface $af(n/b) \leq cf(n)$ para alguna constante $c < 1$, entonces $T(n) \in \Theta(f(n))$.*

Ejemplos:

1. si $T(n) = 9T(n/3) + n$ entonces $a = 9$, $b = 3$, se aplica el caso 1 con $\varepsilon = 1$ y $T(n) \in \Theta(n^2)$
2. si $T(n) = T(2n/3) + 1$ entonces $a = 1$, $b = 3/2$, se aplica el caso 2 y $T(n) = \Theta(\lg n)$
3. si $T(n) = 3T(n/4) + n\lg n$ entonces $a = 3$, $b = 4$, $f(n) \in \Omega(n^{\log_4 3 + 0{,}2})$ y $3(n/4)\lg(n/4) \leq 3/4 n\lg n$, por lo que se aplica el caso 3 y $T(n) \in \Theta(n\lg n)$
4. si $T(n) = 2T(n/2) + n\lg n$, no se puede aplicar el caso 3 porque $f(n) = n\lg n \notin \Omega(n^{1+\varepsilon})$ para cualquier $\varepsilon > 0$

Método de la Ecuación Característica

- se aplica a ciertas recurrencias lineales con coeficientes constantes como:

$$T(n) = \begin{cases} 5 & \text{si } n = 0 \\ 10 & \text{si } n = 1 \\ 5T(n-1) + 8T(n-2) + 2n & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

- en general, para recurrencias de la forma:

$$T(n) = a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \cdots + a_kT(n-k) + b^n p(n)$$

donde $a_i, 1 \leq i \leq k, b$ son constantes y $p(n)$ es un polinomio en n de grado s

Ejemplos:

- en $t(n) = 2t(n-1) + 3^n$, $a_1 = 2$, $b = 3$, $p(n) = 1$, $s = 0$
- en $t(n) = t(n-1) + t(n-2) + n$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b = 1$, $p(n) = n$, $s = 1$

- para resolver la recurrencia $T(n) = a_1T(n-1) + a_2T(n-2) + \cdots + a_kT(n-k) + b^n p(n)$:
  1. encontrar las raíces no nulas de la ecuación característica:

     $$(x^k - a_1x^{k-1} - a_2x^{k-2} - \cdots - a_k)(x-b)^{s+1} = 0$$

     Raíces: $r_i, 1 \leq i \leq l \leq k$, cada una con multiplicidad m_i.
  2. las soluciones son de la forma de combinaciones lineales de estas raíces de acuerdo a su multiplicidad

     $$T(n) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{m_i} c_{ij} n^{j-1} r_i^n$$

  3. si se necesita, se encuentran valores para las constantes $c_{ij}, 1 \leq i \leq l, 0 \leq j \leq m_i - 1$ y $d_i, 0 \leq i \leq s-1$ según la recurrencia original y las condiciones iniciales (valores de la recurencia para $n = 0, 1, \ldots$)

Ejemplo:

$$T(n) = \begin{cases} 0 & \text{si n=0} \\ 2T(n-1)+1 & \text{si } n > 0 \end{cases}$$

1. si $b = 1$ y $p(n) = 1$ de grado 0, la ecuación característica $(x-2)(x-1)^{0+1} = 0$, con $r_1 = 2, m_1 = 1$ y $r_2 = 1, m_2 = 1$
2. la solución general es de la forma $T(n) = c_{11}2^n + c_{21}1^n$.
3. a partir de las condiciones iniciales se encuentra:

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{21} &= 0 \quad \text{de } n = 0 \\ 2c_{11} + c_{21} &= 1 \quad \text{de } n = 1 \end{aligned}$$

   de donde $c_{11} = 1$ y $c_{21} = -1$.
4. la solución es $T(n) = 2^n - 1$

Ejemplo:

$$T(n) = \begin{cases} n & \text{si n=0,1,2} \\ 5T(n-1) - 8T(n-2) + 4T(n-3) & \text{si } n > 2 \end{cases}$$

1. si $b = 0$ y $p(n) = 1$, la ecuación característica es $x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0$, con $r_1 = 1, m_1 = 1$ y $r_2 = 2, m_2 = 2$
2. la solución general es de la forma $T(n) = c_{11}1^n + c_{21}2^n + c_{22}n2^n$.
3. a partir de las condiciones iniciales se obtienen:

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{21} &= 0 \quad \text{de } n = 0 \\ c_{11} + 2c_{21} + 2c_{22} &= 1 \quad \text{de } n = 1 \\ c_{11} + 4c_{21} + 8c_{22} &= 2 \quad \text{de } n = 2 \end{aligned}$$

   de donde $c_{11} = -2$, $c_{21} = 2$ y $c_{22} = -1/2$
4. la solución es entonces la función $T(n) = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2$

Ejemplo: número de Fibonacci

$$F(n) = \begin{cases} n & \text{si n=0,1} \\ F(n-1) + F(n-2) & \text{si } n \geq 2 \end{cases}$$

1. si $b = 0$ y $p(n) = 1$, la ecuación característica es $x^2 - x - 1 = 0$, con raíces $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ y $\hat{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$
2. la solución general es $F(n) = c_{11}\phi^n + c_{21}\hat{\phi}^n$.
3. a partir de las condiciones iniciales se obtienen:

$$\begin{aligned} c_{11} + c_{21} &= 0 \quad \text{de } n = 0 \\ c_{11}\phi + c_{21}\hat{\phi} &= 1 \quad \text{de } n = 1 \end{aligned}$$

   cuyas soluciones son $c_{11} = 1/\sqrt{5}$ y $c_{21} = -1/\sqrt{5}$
4. la solución es $F(n) = \frac{1}{\sqrt{5}}(\phi^n - \hat{\phi}^n)$.

Cambio de Variable

- por ejemplo para la recurrencia

$$T(n) = \begin{cases} a & \text{si n=1} \\ 2T(n/2) + n\log_2 n & \text{sino} \end{cases}$$

  no se puede ninguno de los dos métodos anteriores
- se define una nueva recurrencia $S(i) = T(2^i)$, con el objetivo de llevarla a una forma en la que se pueda resolver siguiendo algún método anterior
- el caso general queda

$$S(i) = T(2^i) = 2T(2^i/2) + 2^i i = 2T(2^{i-1}) + i2^i = 2S(i-1) + i2^i$$

  con $b = 2$ y $p(i) = i$ de grado 1

- la ecuación característica de esta recurrencia es $(x-2)(x-2)^{1+1} = 0$ con raíz 2 de grado 3
- la solución es entonces $S(i) = c_{11}2^i + c_{12}i2^i + c_{13}i^2 2^i$
- volviendo a la variable original queda $T(n) = c_{11}n + c_{12}(\log_2 n)n + c_{13}(\log_2 n)^2 n$.
- se pueden obtener los valores de las constantes sustituyendo esta solución en la recurrencia original:

$$T(n) - 2T(n/2) = n\log_2 n = (c_{12} - c_{13})n + 2c_{13}n(\log_2 n)$$

de donde $c_{12} = c_{13}$ y $2c_{12} = 1$

- por lo tanto $T(n) \in \Theta(n\log^2 n \mid n \text{ es potencia de } 2)$
- si se puede probar que $T(n)$ es eventualmente no decreciente, por la regla de las funciones de crecimiento suave se puede extender el resultado a todos los n (dado que $n\log^2 n$ es de crecimiento suave). En este caso $T(n) \in \Theta(n\log^2 n)$